

文章编号: 1000-8055(2010)10-2201-05

可靠性增长下的 Bayes 序贯检验方法

邢云燕, 武小悦

(国防科学技术大学 信息系统与管理学院, 长沙 410073)

摘 要: 针对可靠性增长下的序贯检验分析问题, 提出了一种变总体 Bayes 序贯检验方法. 该方法依据产品研制过程中产生的多状态试验数据, 利用离散 AMSAA (Army Material Systems Analysis Activity) 可靠性增长模型对产品可靠性的变化规律进行描述, 给出了变总体试验数据似然函数的表达式, 并对变总体 Bayes 序贯检验的后验概率比和决策阈值进行了定义, 进而构建了可靠性增长下的 Bayes 序贯检验模型. 研究表明, 提出的方法有效地解决了具有可靠性增长的可靠性指标的假设检验问题.

关 键 词: 可靠性鉴定; 序贯检验; Bayes 方法; 可靠性增长; 变总体

中图分类号: TB114.3

文献标识码: A

Bayesian sequential testing in reliability growth case

XING Yun-Yan, WU Xiao-Yue

(College of Information Systems and Management,

National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: For the sequential testing analysis under the reliability growth, a Bayesian sequential testing method in varying population cases was proposed in this paper. The method employed discrete AMSAA (Army Material Systems Analysis Activity) model to describe the growth trend of product reliability and figured out the likelihood function of varying population test data. Furthermore, the Bayesian sequential testing model under the condition of reliability growth was obtained by constructing the posterior probability ratio and decision threshold. The research result shows that the hypothesis testing for reliability index with reliability growth can be solved efficiently by the proposed method.

Key words: reliability demonstration; sequential testing; Bayesian method; reliability growth; varying population

可靠性试验鉴定的目的就是依据试验数据判断产品的可靠性指标是否达到规定的研制要求. 序贯检验是研究试验鉴定问题的重要方法, 这主要是由于序贯检验可利用实时数据即刻给出指标是否满足规定要求的统计结论, 并且对作出统计结论所需的试验样本量较少. 按照统计方法的类型, 序贯检验分为经典序贯检验和 Bayes 序贯检验. Wald^[1]是序贯检验方法的奠基人, 首先提出了序贯概率比检验 (SPRT) 方法. Sawas 等^[2]对

截尾序贯检验方法进行了研究. Wolfgang^[3]对指数分布参数均值的 SPRT 方法进行了研究. Carl 等^[4]基于 SPRT 给出了多假设检验下的序贯概率比方法. Deely 等^[5]利用序贯检验方法对指数分布的 Bayes 停时问题进行了研究. Savas 等^[6]对泊松过程简单假设下的序贯检验进行了研究. Jain 等^[7]将 SPRT 应用于可靠性增长模型中变点探测问题的研究. 我国国军标 899-1990《可靠性鉴定和验收试验》也将序贯概率比检验作为设备

收稿日期: 2009-12-15; 修订日期: 2010-06-23

基金项目: 国家自然科学基金 (70571083)

作者简介: 邢云燕 (1979-), 女, 黑龙江宁安人, 博士生, 主要从事装备可靠性试验分析与管理决策.

可靠性验证试验方案的设计方法. 张金槐等^[8]在 SPRT 基础上系统阐述了 Bayes SPRT 方法的基本思想. 李欣欣等^[9]将 Bayes SPRT 方法运用于航空子母炸弹布撒点平面偏差的检验问题之中. 总体来说, 上述方法主要适用于同总体试验样本的统计决策分析问题.

随着装备复杂性和规模的加大, 那些仅仅依赖几次定型试验数据来检验装备可靠性指标的鉴定方法已难以适用. 于是, 工程上提出了利用系统研制过程中的试验信息进行战技指标检验的综合试验鉴定思想. 由于武器系统的研制过程是分阶段进行试验的, 因此在系统的研制过程中, 随着试验阶段的推进产生了多种不同总体的试验样本, 并且随着对系统设计缺陷的改进, 系统的可靠性不断增长^[10-11]. 然而现有的序贯分析方法, 无论是经典的序贯分析还是 Bayes 序贯分析, 并没有考虑到产品的可靠性增长情况及变总体试验数据的特点. 因此, 当产品可靠性处于增长状态时, 如何利用产品研制过程中的变总体试验数据进行可靠性指标的序贯分析, 是工程实际中需要解决的关键问题.

本文基于上述问题, 针对成败型系统, 给出了一种变总体 Bayes 序贯检验方法. 首先对描述系统可靠性增长的离散 AMSAA 模型进行了讨论. 然后给出了产品可靠性处于增长状态下的变总体 Bayes 序贯检验方法. 最后给出了一个算例.

1 基本假定和描述

武器装备系统的研制过程是分阶段、分批次进行试验的. 各阶段试验结束之后, 对系统研制过程中暴露的设计缺陷进行改进, 然后再进入下一试验阶段. 因此, 系统的性能指标随着试验阶段的推进不断得到改善, 并且在研制过程中产生了多种不同状态的试验数据. 由此, 可以假设

- 1) 系统研制过程中各阶段试验相互独立, 同一阶段的试验数据来自同一总体;
- 2) 系统的研制试验采取延缓修正方式;
- 3) 系统第 j ($j = 1, 2, \dots$) 阶段的试验数据为 (s_j, f_j) , 即在 $n_j = s_j + f_j$ 次试验中, 有 s_j 次成功, f_j 次失败.

2 离散 AMSAA 可靠性增长模型

可靠性增长模型是描述产品研制过程中可靠性的变化规律和对不断变化着的产品可靠性进行统计分析的有效手段. 按照失效数据统计性质, 可

可靠性增长模型分为两类: 一类是连续型可靠性增长模型, 一类是离散型可靠性增长模型. 对于成败型武器装备系统的研制试验过程, 采用离散可靠性增长模型进行统计分析.

20 世纪 60 年代, 美国通用电气公司的工程师 Duane 提出了一种近似函数关系 (学习曲线特性)

$$E\{K(T^*)\} = \lambda T^{*\beta} \quad (1)$$

其中 λ, β 均为正数, 分别是形状参数和尺度参数, T^* 表示累积试验时间, 函数 K 表示观测到的累积失效次数.

在离散可靠性试验框架下, 由累积试验次数 T 代替累积试验时间 T^* , 故式 (1) 可改写为

$$E\{K(T)\} = \lambda T^\beta \quad (2)$$

由式 (2) Crow 推导出如下离散可靠性增长模型:

$$R_i = 1 - \frac{\lambda(t_i^\beta - t_{i-1}^\beta)}{n_i} \quad (3)$$

其中 R_i 为系统第 i 阶段的可靠性, $t_i = \sum_{j=1}^i n_j$ 为系统研制至第 i 阶段的累积试验次数.

对于式 (3), 参数 λ 与系统最初的可靠性水平有关. $1 - \beta$ 为可靠性增长率, 当 $0 < \beta < 1$ 时, 系统可靠性呈现增长趋势. 当 $\beta = 1$ 时, 系统可靠性不发生变化. 当 $\beta > 1$ 时, 系统可靠性呈现衰退趋势.

特别地, 当系统各阶段的试验样本量相同时, 即 $n_i = n$ ($i = 1, 2, \dots$) 时, 式 (3) 转化为如下离散可靠性增长模型:

$$R_i = 1 - \lambda n^{\beta-1} [i^\beta - (i-1)^\beta] \quad (4)$$

对于研制过程采取延缓修正方式的成败型武器系统, 由离散 AMSAA 可靠性增长模型描述系统可靠性的变化规律时, 可认为系统在第 i ($i = 1, 2, \dots$) 阶段的可靠性为

$$R_i = 1 - \frac{\lambda(t_i^\beta - t_{i-1}^\beta)}{n_i}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (5)$$

3 成败型系统变总体下的 Bayes 序贯检验方法

在武器装备系统的研制过程中, 随着试验阶段的推进, 试验样本信息是一个阶段接着一个阶段获取的, 并且不同阶段的试验样本来自不同的统计总体, 我们把这样得到的样本信息称为序贯变总体样本信息. 另外, 在系统研制过程中, 随着修正措施的不断引入, 系统的性能参数不断得到

改善, 系统的可靠性处于增长状态. 在这种情况下, 我们把利用序贯变总体样本信息对系统性能参数是否满足研制要求而进行的统计决策分析称之为变总体序贯检验方法. 当考虑到验前信息时, 称为变总体下的 Bayes 序贯检验方法. 这里以成败型系统的可靠性为例展开研究.

记研制任务书要求的可靠性规定值为 R^0 , 最低可接收值为 $R^1, R^0 > R^1$, 生产方风险为 α_0 , 使用方风险为 β_1 . 研究的问题是: 在 $\alpha_0, \beta_1, R^0, R^1$ 已知的条件下, 如何利用已有各阶段试验数据 $(s_j, f_j), j = 1, 2, \dots, i$ 和系统可靠性变化规律式 (5), 对当前第 $i (i = 1, 2, \dots)$ 阶段的系统可靠性 R_i 究竟满足哪种研制要求作出统计决策. 确切地说, 就是考虑下述假设检验问题:

$$H_0: R_i = R^0, \quad H_1: R_i = R^1 \quad (6)$$

当 $0 < \beta < 1$ 时, 对于固定的 λ 系统可靠性 $R_i(\beta) = 1 - \frac{\lambda(t_i^\beta - t_{i-1}^\beta)}{n_i}$ 是关于 β 的严格单调递减函数. 这是由于当 $0 < \beta < 1$ 时, $R'_i(\beta) = -\frac{\lambda}{n_i}(t_i^\beta \ln t_i - t_{i-1}^\beta \ln t_{i-1}) < 0$, 且 $R_i(\beta)$ 是关于 β 在 $(0, 1)$ 上的连续函数, 因此系统可靠性 $R_i(\beta)$ 在 λ 固定下是关于 β 在 $(0, 1)$ 的单调递减函数.

于是, 上述假设检验问题式 (6) 等价于

$$H_0: \beta = \beta_0, \quad H_1: \beta = \beta_1 \quad (7)$$

其中 $\beta_l, l = 0, 1$ 表示系统可靠性 R_i 为 R^l 时对应的 β 值, $0 < \beta_0 < \beta_1 < 1$.

令 $x_j = (s_j, f_j), j = 1, 2, \dots, i$, 则系统第 $j (j = 1, 2, \dots, i)$ 阶段的似然函数为

$$L(x_j | R_j) = \begin{pmatrix} s_j + f_j \\ f_j \end{pmatrix} R_j^{s_j} (1 - R_j)^{f_j}, \quad j = 1, 2, \dots, i \quad (8)$$

由于系统研制过程中各阶段试验相互独立, 由式 (8) 可得系统 i 个研制阶段试验数据的似然函数为

$$L(x_1, x_2, \dots, x_i | R_1, R_2, \dots, R_i) = c_1 \prod_{j=1}^i R_j^{s_j} (1 - R_j)^{f_j} \quad (9)$$

其中 c_1 为常数.

由式 (5) 可知系统第 $j (j = 1, 2, \dots, i)$ 阶段的可靠性为 $R_j = 1 - \frac{\lambda(t_j^\beta - t_{j-1}^\beta)}{n_j}$, 故式 (9) 改写为

$$L(x_1, x_2, \dots, x_i | \beta) = c_1 \prod_{j=1}^i \left[1 - \frac{\lambda(t_j^\beta - t_{j-1}^\beta)}{n_j} \right]^{s_j} \left[\frac{\lambda(t_j^\beta - t_{j-1}^\beta)}{n_j} \right]^{f_j} \quad (10)$$

令 $x = (x_1, x_2, \dots, x_i)$, 由式 (10) 可得假设检验式 (7) 下的似然函数分别为

$$\begin{aligned} L(x | \beta_0) &= c_2 \prod_{j=1}^i (t_j^{\beta_0} - t_{j-1}^{\beta_0})^{f_j} [n_j - \lambda(t_j^{\beta_0} - t_{j-1}^{\beta_0})]^{s_j} \\ L(x | \beta_1) &= c_2 \prod_{j=1}^i (t_j^{\beta_1} - t_{j-1}^{\beta_1})^{f_j} [n_j - \lambda(t_j^{\beta_1} - t_{j-1}^{\beta_1})]^{s_j} \quad (11) \end{aligned}$$

其中 c_2 为常数.

记关于系统可靠性 R_i 满足规定值 R^0 和最低可接受值 R^1 的验前概率分别为 $P(H_0)$ 和 $P(H_1)$, 且有 $P(H_0) + P(H_1) = 1$. 由于系统可靠性 $R_i(\beta)$ 在 λ 固定下是关于 β 在 $(0, 1)$ 的单调递减函数, 故在假设检验式 (7) 下, 关于 β 在原假设和备则假设下的验前概率也分别为 $P(H_0)$ 和 $P(H_1)$, 且有 $P(H_0) + P(H_1) = 1$.

定义变总体 Bayes 序贯检验的后验概率比为

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{P(H_1 | x)}{P(H_0 | x)} = \frac{\frac{P(H_1)L(x | \beta_1)}{D}}{\frac{P(H_0)L(x | \beta_0)}{D}} = \frac{P(H_1)L(x | \beta_1)}{P(H_0)L(x | \beta_0)} \quad (12) \end{aligned}$$

其中 $P(H_0 | x), P(H_1 | x)$ 为 H_0, H_1 的后验概率, $D = P(H_0)L(x | \beta_0) + P(H_1)L(x | \beta_1)$.

由式 (11) 和式 (12) 可得成败型系统可靠性增长下的 Bayes 序贯检验的后验概率比为

$$\begin{aligned} \rho^{(i)} &= \frac{P(H_1) \prod_{j=1}^i (t_j^{\beta_1} - t_{j-1}^{\beta_1})^{f_j} [n_j - \lambda(t_j^{\beta_1} - t_{j-1}^{\beta_1})]^{s_j}}{P(H_0) \prod_{j=1}^i (t_j^{\beta_0} - t_{j-1}^{\beta_0})^{f_j} [n_j - \lambda(t_j^{\beta_0} - t_{j-1}^{\beta_0})]^{s_j}} = \\ &= \frac{P(H_1)}{P(H_0)} \prod_{j=1}^i \left[\frac{t_j^{\beta_1} - t_{j-1}^{\beta_1}}{t_j^{\beta_0} - t_{j-1}^{\beta_0}} \right]^{f_j} \left[\frac{n_j - \lambda_j^{\beta_1} + \lambda_{j-1}^{\beta_1}}{n_j - \lambda_j^{\beta_0} + \lambda_{j-1}^{\beta_0}} \right]^{s_j} \quad (13) \end{aligned}$$

引入决策阈值 $A^{(i)}, B^{(i)}$, 给出如下检验准则:

- 1) 如果 $\rho^{(i)} \leq A^{(i)}$, 采纳假设 H_0 ;
- 2) 如果 $\rho^{(i)} \geq B^{(i)}$, 采纳假设 H_1 ;
- 3) 如果 $A^{(i)} < \rho^{(i)} < B^{(i)}$, 不做判断, 改进产品设计, 继续试验.

对于决策阈值 $A^{(i)}, B^{(i)}$ 的确定, 由于在假设检验下验前概率和试验样本在实际中是变动的, 因此决策阈值 $A^{(i)}, B^{(i)}$ 也应该随着试验样本和验前概率的变化而变化. 根据 Bayes 序贯检验的思想, 在考虑两类风险 α_0, β_1 的条件下, 取为^[12]

$$\begin{cases} A^{(i)} = \frac{\beta_{\pi_1}}{P(H_0) - \alpha_{\pi_0}} \\ B^{(i)} = \frac{P(H_1) - \beta_{\pi_1}}{\alpha_{\pi_0}} \end{cases} \quad (14)$$

这里, β_{π_1} 表示考虑了 R_i 验前概率时的采伪概率, α_{π_0} 表示考虑了 R_i 验前概率时的弃真概率.

也就是说, 对于考虑两类风险 $\alpha_{\pi_0}, \beta_{\pi_1}$ 的变总体 Bayes 序贯检验问题, 当对第 $i(i=1, 2, \dots)$ 阶段的系统可靠性 R_i 进行统计决策分析时, 首先利用已有试验数据 $(s_j, f_j), j=1, 2, \dots, i$ 计算后验概率比 $\rho^{(i)}$ 和决策阈值 $A^{(i)}, B^{(i)}$. 然后进行决策, 如果 $\rho^{(i)} \leq A^{(i)}$, 采纳假设 H_0 ; 如果 $\rho^{(i)} \geq B^{(i)}$, 采纳假设 H_1 ; 如果 $A^{(i)} < \rho^{(i)} < B^{(i)}$, 则不做判断, 改进产品设计, 继续试验, 直至做出决策为止.

图 1 为变总体 Bayes 序贯检验过程图.

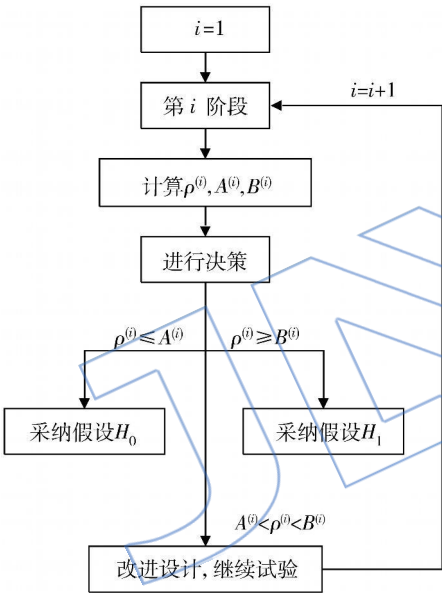


图 1 变总体 Bayes 序贯检验过程图
Fig. 1 Process of Bayesian sequential testing in varying population case

4 算例分析

某导弹系统的研制试验采取延缓修正方式, 已经历 4 个试验阶段, 各阶段试验数据见表 1. 研制任务书要求的可靠性规定值为 0.8, 最低可接收值为 0.6, 生产方与研制方可承担的风险分别为 0.1, 试判断研制过程中系统的可靠性是否满足规定的研制要求.

表 1 导弹系统的研制试验数据

Table 1 Development test data of missile system			
第 i 阶段	试验样本量 n_i	成功次数 s_i	失败次数 f_i
1	6	3	3
2	6	4	2
3	5	4	1
4	5	5	0

按照上述方法, 下面给出关于系统可靠性变总体 Bayes 序贯检验的统计决策分析过程, 这里假定 $\lambda=0.5$, 分析过程如表 2 所示.

由表 2 的统计分析过程可以看出, 在第 1, 2, 3 阶段试验结束时, 系统可靠性尚未达到规定的要求. 但是, 随着各研制阶段结束后对产品设计缺陷的修正, 系统的可靠性得到提高, 越来越接近规定值, 直到第 4 阶段试验结束时, 系统的可靠性已满足规定的要求, 因此终止研制过程, 认为产品合格. 由以上统计结果给出图 2 所示的变总体 Bayes 序贯检验图.

如果不考虑研制过程中各阶段试验数据的差异, 按照同总体试验数据的序贯检验方法进行分析, 在相同的决策风险和假设检验下, 当系统试验 22 次, 失效 6 次, 验前概率分别为 0.7 和 0.3 时, 经计算, 后验概率比为 0.2520, 决策常数分别为

表 2 系统可靠性的变总体 Bayes 序贯检验分析
Table 2 Bayesian sequential testing analysis for system

阶段	原假设检验	等价假设检验	验前概率	$\rho^{(i)}$	$A^{(i)}$	$B^{(i)}$	决策结论
1	$R_1 = 0.8 \leftarrow R_1 = 0.65$	$\beta_0 = 0.4886 \leftarrow \beta_1 = 0.8009$	$P(H_0) = 0.5$	2.8745	0.2500	4	改进设计 继续试验
2	$R_2 = 0.8 \leftarrow R_2 = 0.65$	$\beta_0 = 0.7258 \leftarrow \beta_1 = 0.8898$	$P(H_0) = 0.55$	1.3222	0.2222	3.5	改进设计 继续试验
3	$R_3 = 0.8 \leftarrow R_3 = 0.65$	$\beta_0 = 0.7596 \leftarrow \beta_1 = 0.9041$	$P(H_0) = 0.6$	0.3668	0.2000	3	改进设计 继续试验
4	$R_4 = 0.8 \leftarrow R_4 = 0.65$	$\beta_0 = 0.7765 \leftarrow \beta_1 = 0.9112$	$P(H_0) = 0.7$	0.0131	0.1667	2	终止研制 产品合格

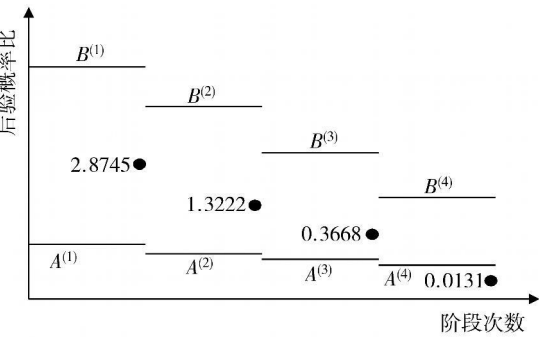


图 2 变总体 Bayes 序贯检验图

Fig. 2 Bayesian sequential testing in varying population case

0.1071, 1.7143. 也就是说, 此时还不能对系统可靠性是否满足要求作出判断, 还需继续试验.

由两种方法统计鉴定结果来看, 在相同的决策风险和假设检验下, 本文给出的变总体 Bayes 序贯检验方法在充分利用研制试验信息进行统计分析的同时, 还考虑到试验数据之间的差异性, 即考虑到产品可靠性的增长, 因此鉴定结论是合理的.

5 结 论

本文针对可靠性增长下的序贯分析问题, 以成败型系统为例, 提出了一种 Bayes 框架下的变总体序贯检验方法. 该方法利用可靠性增长模型, 依据系统研制过程中产生的多状态试验信息, 给出了变总体序贯检验后验概率比的定义和判决准则, 从而作出了统计决策. 由于综合利用了系统研制过程中不同研制阶段的试验信息, 并且考虑到产品的可靠性增长, 因此有效实现了小子样条件下武器装备的可靠性综合试验鉴定, 并且从理论上拓展了现有同总体分布下的 Bayes 序贯检验方法.

参考文献:

[1] Wald A. Sequential analysis[M]. New York: John Wiley, 1947.

[2] Sawasd T, John B T. Truncated sequential probability ratio test[J]. Information Sciences, 1977, 13(3): 283-300.

[3] Wolfgang S. On the SPRT for the mean of an exponential distribution[J]. Statistics & Probability Letters, 1987, 5(6): 389-395.

[4] Carl W B, Venugopal V V. A sequential procedure for multihypothesis testing[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1994, 40(6): 1994-2006.

[5] Deely J J, Keats J B. Bayes stopping rules for reliability testing with the exponential distribution[J]. IEEE Transactions on Reliability, 1994, 43(2): 288-293.

[6] Savas D, Semih O S. Sequential testing of simple hypotheses about compound poisson processes [J]. Stochastic Processes and their Applications, 2006, 116 (12): 1892-1919.

[7] Jain S, Jain R K. An application of SPRT for detecting change point in a reliability growth model[J]. Microelectronics Reliability, 1994, 34(5): 811-814.

[8] 张金槐, 刘琦, 冯静. Bayes 试验分析方法[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 2007.

[9] 李欣欣, 谢红卫, 孙志强. 基于 Bayes 方法的航空子母炸弹制导精度分析[J]. 兵工学报, 2008, 29(5): 572-576.

LI Xinxin, XIE Hongwei, SU N Zhiqiang. Guidance precision analysis for aerial dispenser and bomblet based on Bayesian method [J]. Acta Armamentarii, 2008, 29(5): 572-576. (in Chinese)

[10] 刘琦, 冯静, 周经伦. 基于 Gompertz 模型的液体火箭发动机可靠性增长分析[J]. 航空动力学报, 2004, 19(3): 419-423.

LIU Qi, FENG Jing, ZHOU Jinglun. The reliability growth analysis for liquid rocket engine according to the Gompertz model[J]. Journal of Aerospace Power, 2004, 19(3): 419-423. (in Chinese)

[11] 刘飞, 窦毅芳, 张为华. 基于成败试验的导弹贮存可靠性 Bayes 分析模型[J]. 航空动力学报, 2007, 22(1): 102-107.

LIU Fei, DOU Yifang, ZHANG Weihua. Bayesian model for missile storage reliability analysis based on success-failure test[J]. Journal of Aerospace Power, 2007, 22(1): 102-107. (in Chinese)

[12] 武小悦, 刘琦. 装备试验与评价[M]. 北京: 国防工业出版社, 2008.